Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Схема заполнения

Для билета

Для билета

Вариант задания 2

№1

Пусть Маша съедает полную корзинку за x минут, Катюша за y, а Артур за z, тогда скорость работы Маши $= \frac{1}{x}$ $\frac{\text{корзин}}{\text{мин}}$, Катюша $= \frac{1}{y}$ мин, а Артура $= \frac{1}{z}$ мин, вместе они съедают корзину ($\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$ мин)

Со скоростью $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = \frac{xy+xz+yz}{xyz}$ $\frac{\text{корзин}}{\text{мин}}$,

1 корзину съедят за $\frac{xyz}{xy+xz+yz}$ мин, две за $\frac{2xyz}{xy+xz+yz}$

№1

Пусть Маша съедает полную корзину за x, Катюша за y, а Артур за z (минут), тогда скорость работы Маши $= \frac{1}{x}$, Катюша $= \frac{1}{y}$, Артура $= \frac{1}{z}$ (корзин/минута), их общ. скор. $= \frac{xy+xz+yz}{xyz}$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = \frac{xy+xz+yz}{xyz}$, а 2 корзины съедят за $\frac{2xyz}{xy+xz+yz}$ мин

дано, что $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} = \frac{1}{10}$; $\frac{1}{x}+\frac{1}{z} = \frac{1}{18}$; $\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = \frac{1}{15}$,

тогда $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{2}\right)2 = \frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{18} = \frac{2}{9}$ (мин)

$\frac{xy+xz+yz}{xyz} = \frac{1}{9}$ (1 корзину сушат за 9 мин, две за 18 минут

Ответ: 18 мин.

№2

$(y-1)(4x+8) = 3x^2 - x - 14$

$(y-1)(4x+8) = (x+2)(3x-7)$

$(y-1)(x+2)4 - (x+2)(3x-7) = 0$

$(x+2)((y-1)4 - (3x-7)) = 0$

$(x+2)(4y-3x+3) = 0$

$\left[\begin{array}{l} x+2=0 \\ 4y-3x+3=0 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x=-2 \\ y=0{,}75x+0{,}75x \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x=-2 \\ y=0{,}75x-0{,}75 \end{array}\right.$, $\left[\begin{array}{l} x=-2 \\ y=0{,}75(x-1) \end{array}\right.$

Уравнение имеет целое решение, если (x=-2 и y целое) или (x-1 кратно 4)

№4

$\left|\frac{x^3+(x-2)^2-(x^2-2)x-72}{\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}-x}\right| = a^2+2$ (x ≠ 4

$\left|\frac{x^2-2x-8}{4-x}\right| = a^2+2$

$|x+2| = a^2+2$

если $x>0$, то $|x+2|>2$, $|x+2|=x+2$,

$x+2=a^2+2$; $x=a^2$ где $x>0$, $a^2>0$

неравенство $x=a^2$, где $x>0$ не имеет решений только при $a=0$, не считая комплексные и мнимые числа.

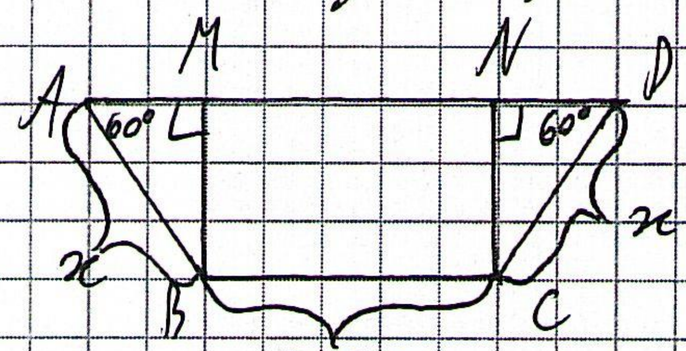
Ответ: $a\in(-\infty;0)(0;+\infty)$

№6

Площ. поперечн. сеч. квадратного и полукруглого тёплого фронтов (т.к. т.к. ширина листа одинакова), а треугольного-нет, значит т.к. забор вдвое меньше тёплого с имею. площ. поперечн. сеч., - имеет его макс. поперечн. сеч.:

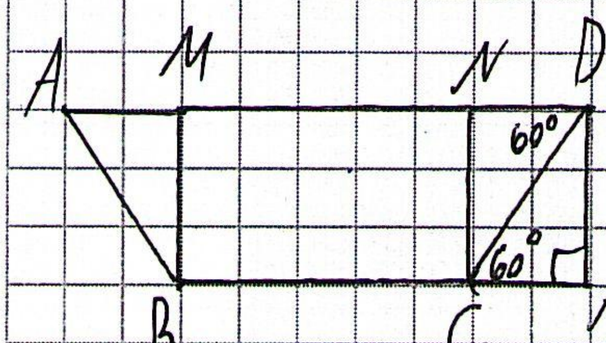
Пусть боковая сторона = x.

т.к. тупой угол трапеции равен 120°, то острый = 60°



$S_{ABCD}=S_{AMB}+S_{BMNC}+S_{NCD}=$

$=S_{BMNC}+2S_{NDC}$, т.к. $\triangle AMB=\triangle NDC$ по гипотенузе и острому углу.



Опустим перпендикуляр из точки D на сторону BC, получили точку A_1, $\angle DCA_1=180°-\angle BCD=180°-120°=60°$,

$\triangle DCA_1=\triangle CND$ по гипотенузе и острому углу.

$S_{BMNC} + 2S_{NDC} = S_{BMNC} + S_{NDC} + S_{DCA_1} = S_{MBA_1D} =$
$= BA_1 \cdot DA_1 = (BC + CA_1) \cdot DA_1$

т.к. CA_1 лежит как в прямоуг. треугольнике против угла в 30°, то CA_1 равен половине гипотенузы, равной x, $CA_1 = 0{,}5x$, по теореме Пифагора в $\triangle CDA_1$:

$(CA_1)^2 + (DA_1)^2 = (CD)^2$

$(0{,}5x)^2 + (DA_1)^2 = (x)^2$

$(DA_1)^2 = x^2 - 0{,}25x^2 = 0{,}75x^2$

$DA_1 = \sqrt{0{,}75\ x^2} = 0{,}5\sqrt{3}\ x$

$S_{MBA_1D} = (6 - 2x + 0{,}5x)(0{,}5\sqrt{3}\ x) = 3\sqrt{3}\ x - 0{,}75\sqrt{3}\ x^2 =$

$= \sqrt{3}\ x(3 - 0{,}75x)$, графиком такой функции-параболой, ветви которой направлены вниз, а нам надо найти её макс. значение - вершину. $y = \sqrt{3}\ x(3 - 0{,}75x)$

составим таблицу значений:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$-24\sqrt{3}$	$-13{,}75\sqrt{3}$	$-9\sqrt{3}$	$-3{,}75\sqrt{3}$	0	$2{,}25\sqrt{3}$	$3\sqrt{3}$	$2{,}25\sqrt{3}$

парабола зеркальна, относительно вертикальной прямой, проходящей через её вершину, и имеет максимум 2 одинаковых значения на разные стороны от вершины, тогда x, при которой функция равна вершине параболы удалён от x_1 и x_2, где если $f(x_1) = f(x_2)$ в точках при $x = 1$ и $x = 3$ $y = 2{,}25\sqrt{3}$,

тогда вершина находится в точке
$\left(\frac{x_1+x_2}{2}; y\right)$, (вообще) и вершина
равен $\frac{1+3}{2} = 2$ (y в вершине равен
$\sqrt{3} \cdot 2(3 - 0{,}75 \cdot 2) = 3\sqrt{3}$ (это макс. площ.
треугольника. (площ. сеч.
конуса) площ. полн. сеч. остальных
тел.):

полукруглый: $S_{полукр.} = \frac{S_{полн.}}{2} = \frac{\pi R^2}{2} =$

$= \frac{\pi \left(\frac{L_{окр}}{2\pi}\right)^2}{2} = \frac{\pi}{4\pi} \cdot \frac{\left(\frac{6\sqrt{\pi}}{\sqrt{3}}\right)^2}{8\pi^2} =$

$= 36$:

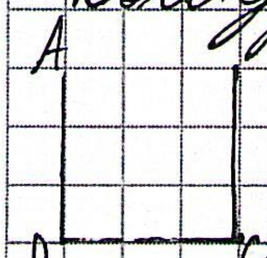
полукруглый: $S_{полукр.} = \frac{S_{кругл}}{2}$, $S_{кругл} = \pi R^2$,

$R = \frac{L_{окр.кругл}}{2\pi}$ $L_{окр.кругл.} = 6\sqrt{\frac{\pi}{\sqrt{3}}} = 3\sqrt{\frac{\pi}{\sqrt{3}}}$

$R = \frac{3\sqrt{\frac{\pi}{\sqrt{3}}}}{2\pi}$ $R^2 = \frac{9\frac{\pi}{\sqrt{3}}}{4\pi^2} = \frac{9}{4\pi\sqrt{3}}$ $S_{кругл} = \frac{9\pi}{4\pi\sqrt{3}} =$

$= \frac{9}{4\sqrt{3}} = 0{,}75\sqrt{3}$

квадратный: =



$S = AB \cdot BC = (AB)^2 = \left(\frac{1}{3} \cdot 6\sqrt{3}\right)^2 = 4\sqrt{3}$

полукруглый:

$S_{полукр.} = \frac{S_{кругл}}{2}$ $S_{кругл} = \pi R^2$ $R = \frac{L_{окр}}{2\pi}$

$L_{окр.} = 6\sqrt{\frac{\pi}{\sqrt{3}}} \cdot 2 = 12\sqrt{\frac{\pi}{\sqrt{3}}}$ $R = \frac{12\sqrt{\frac{\pi}{\sqrt{3}}}}{2\pi}$

$S_{конуса} = \pi \cdot \left(\frac{6\sqrt{\pi}}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{\pi \cdot 36 \cdot \frac{\pi}{\sqrt{3}}}{\pi^2} = \frac{36}{\sqrt{3}} =$

$= \frac{36\sqrt{3}}{3} = 12\sqrt{3}$

$S_{полусф} = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$.

Нам нужно не менее 4 труднеуспевающих и не менее 1 полукруглого теплова, сразу возьмём их:

$100\sqrt{3} - 3\sqrt{3} \cdot 4 - 6\sqrt{3} = 82\sqrt{3}$,

теперь посчитаем какой тёплоёмкий вещество:

труднеуспевающий — $\frac{3\sqrt{3}}{3} = 0{,}8\sqrt{3}$ ($м^2$/у.е.)

полукруглый: $\frac{6\sqrt{3}}{7} = \frac{6}{7}\sqrt{3}$ ($м^2$/у.е.)

квадратный: $\frac{4\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$ ($м^2$/у.е.)

Выгодно всего квадратных на их можно только 10, возьмём $82\sqrt{3} - 4\sqrt{3} \cdot 10 = 42\sqrt{3}$, т.к. $\frac{6}{7}\sqrt{3} > 0{,}8\sqrt{3}$, то остальную площ. удобряем полукруглыми тепловодами:

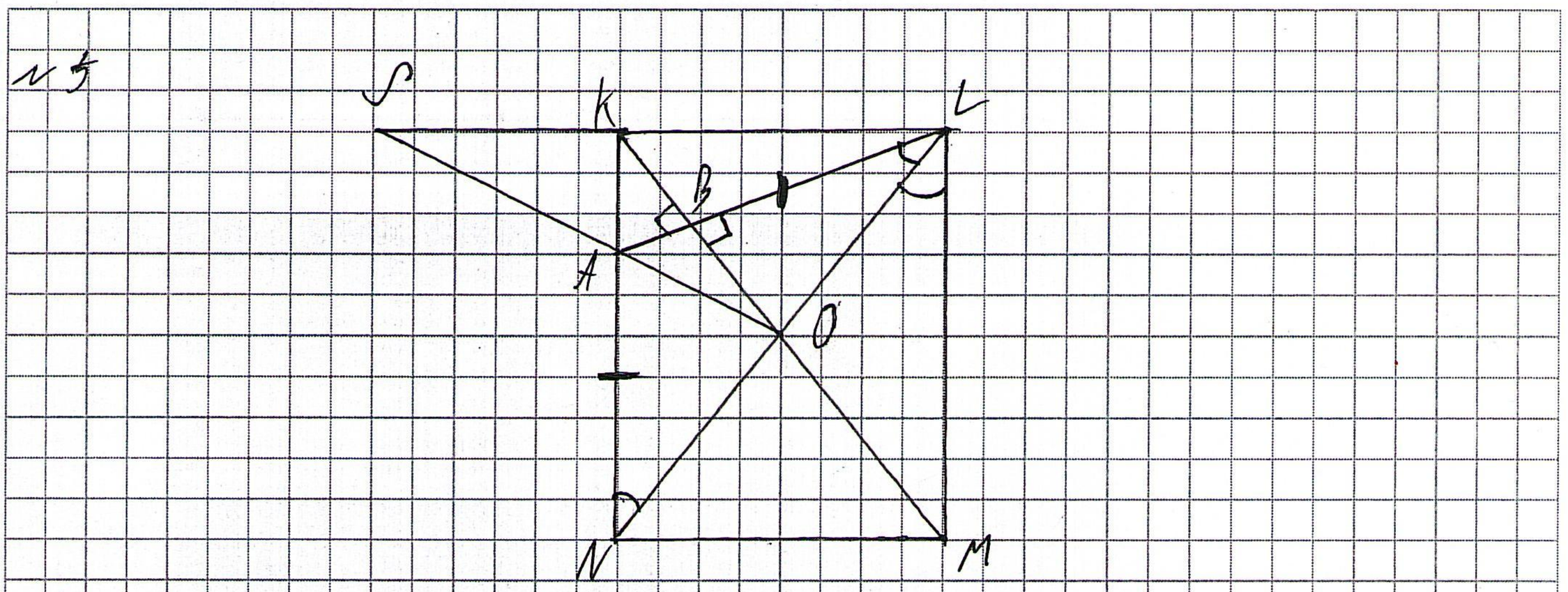
$\frac{42\sqrt{3}}{\frac{6}{7}6\sqrt{3}} = 7$

Общая цена: 4 у.е. $\cdot 10 + 4 \cdot 5$ у.е. $+ 7$ у.е. $\cdot 8 = 116$ у.е.

Ответ: 116 у.е.

Вариант задания _____ Лист работы 7 из 8

№5



Дано: KLMN - прямоугольник, $AN = AL$, $AL \perp KM$

Найти: $\frac{AN}{AK}$; $\frac{SL}{LA}$

Решение:

т.к. ~~$\triangle ANL$ - р~~ $AN = AL$, то $\triangle ANL$ - равнобедр.,

т.к. $\triangle NAL$ - равнобедр., то $\angle ANL = \angle ALN$,

т.к. KLMN - прямоугольник, то $NK \parallel LM$,

а $KL \parallel NM$, $\angle K = \angle L = \angle N = \angle M = 90^\circ$, т.к.

$KN \parallel LM$, то $\angle NLM = \angle KNL$, как накрест

лежащие, т.к. $\angle LNM = 90^\circ$, то $\triangle BLM$ -

прямоугольный, LO - биссектриса

в прямоугольном треугольнике

$\triangle BLM$ (т.к. $\angle NLM = \angle ANL = \angle ALN$)